

JULIANA COSTA DE OLIVEIRA

MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO PARA DETERMINAÇÃO DE  
IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS EM CASCAS FINAS SUJEITAS A  
FLAMBAGEM

São Paulo

2009

JULIANA COSTA DE OLIVEIRA

MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO PARA DETERMINAÇÃO DE  
IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS EM CASCAS FINAS SUJEITAS A  
FLAMBAGEM

MONOGRAFIA DE FORMATURA  
APRESENTADO À ESCOLA  
POLITÉCNICA PARA OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE ENGENHEIRO

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:  
ENGENHARIA MECATRÔNICA

ORIENTADOR:  
PROF. DR. ALEXANDRE KAWANO

São Paulo  
2009

## FICHA CATALOGRÁFICA

Oliveira, Juliana Costa de  
Método de regularização para determinação de imperfeições  
geométricas em cascas finas sujeitas a flambagem / J.C. de  
Oliveira. -- São Paulo, 2009.  
43 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade  
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de  
Sistemas Mecânicos.

1. Cascas cilíndricas 2. Métodos de regularização e penaliza-  
ção 3. Problemas inversos 4. Flambagem I. Universidade de São  
Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia  
Mecatrô- nica e de Sistemas Mecânicos II. t.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais pela dedicação que destinaram a mim ao longo da minha vida. Pelo suporte emocional, financeiro e, principalmente, pelo amor incondicional.

Agradeço ao André pelo companheirismo ao longo desses anos, por ter minimizado minhas dificuldades e ter tornado os dias politécnicos mais coloridos.

Agradeço ao prof. Dr. Alexandre Kawano pela vasta paciência e por todo conhecimento transmitido.

E finalmente a Deus, pela oportunidade de crescer intelectualmente e principalmente como ser humano.

## RESUMO

Este projeto tem como proposta apresentar uma abordagem, diferente da convencional, que permite medir indiretamente as imperfeições geométricas axissimétricas presentes em cascas cilíndricas sujeitas a flambagem. O diferencial desta abordagem é que ao invés de ser necessário o mapeamento de toda superfície do corpo, basta inferir medições em um único ponto da estrutura. O parâmetro a ser medido experimentalmente é a resposta dinâmica de um único ponto da estrutura quando o corpo em análise é submetido a um carregamento súbito e instantâneo. Mostra-se, portanto, que é possível determinar as imperfeições geométricas de uma superfície por meio do conhecimento do perfil de velocidade de um ponto da superfície da estrutura durante um intervalo de tempo limitado. O cerne deste trabalho é a discussão e a apresentação dos argumentos matemáticos que asseguram que esta abordagem matemática fornece resultados confiáveis, que condizem com a realidade. Posto isto, é importante salientar que esta abordagem indireta (obtenção das imperfeições geométricas por meio do conhecimento da resposta dinâmica de um ponto da estrutura quando a mesma é submetida a um impulso), recai na formulação de um problema inverso e mal-posto. Portanto, há a necessidade do emprego de um método de regularização para que os resultados fornecidos de acordo com esta formulação sejam úteis do ponto de vista da engenharia. Para a análise deste problema são empregados três métodos de regularização. São eles: regularização de Tikhonov, método iterativo de Landweber e método probabilístico bayesiano. Para finalizar, posteriormente é feito um estudo comparativo entre os três métodos implementados.

Palavras-chave: Regularização, Problemas Inversos, Flambagem, Problema Mal-Posto.

## ABSTRACT

The aim of this paper is finding out a mathematical approach, different from the conventional ones, to measure indirectly the axisymmetric geometric imperfection  $\omega_0$  in a given cylindrical shell subject to buckling. The trick of this approach is to get the measure just in one point of the structure instead of to get the measures in the whole surface. The parameter to be measured is the dynamic response of one point of the structure when the body is subject to a suddenly and instantaneous load. It is shown that by this way it is possible to recover  $\omega_0$  from the knowledge of the velocity of a point during a bounded period of time. The main point of this paper is the discussion and the presentation of mathematical arguments which ensure that this approach is reliable. It is important to emphasize that this indirect approach lays on the formulation of an inverse problem and ill-posed problem. Then, it is necessary to apply regularization method to obtain useful solutions from the engineering point of view. It is applied three regularization methods. They are: Tikhonov regularization, iterative method of Landweber and Statistical Bayesian approach. To sum up, it is done a comparative study between the all methods applied.

Keywords: Regularization, Inverse Problems, Buckling, Ill-posed Problem.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURE 1: PROCESSO DE MEDIÇÃO DE TORRES DE RESFRIAMENTO UTILIZANDO TEODOLITOS.....	11
FIGURE 2: LASER “RANGE FINDER”UTILIZADO EM MEDIÇÃO DE IMPERFEIÇÕES EM ESTRUTURAS DE GRANDE ESCALA. FONTE[6]. .....	12
FIGURE 3: ESQUEMA DE UM SISTEMA E SEUS PARÂMETROS.....	14
FIGURE 4: REPRESENTAÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO. FONTE[8].....	16
FIGURE 5: GRÁFICO QUE EXPRESSA A INFLUÊNCIA DO FATOR DE REGULARIZAÇÃO NA PRECISÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA. ....	32
FIGURE 6: GRÁFICO QUE EXPRESSA A INFLUÊNCIA DO INTERVALO DE TEMPO NA PRECISÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA. ....	32
FIGURE 7: GRÁFICO QUE EXPRESSA A INFLUÊNCIA DO PONTO DA ESTRUTURA (ESCOLHIDO PARA SER OBSERVADO O PERFIL DE VELOCIDADE APÓS O IMPACTO) NA PRECISÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA.....	33
FIGURE 8: GRÁFICO QUE EXPRESSA A INFLUÊNCIA DO FATOR DE PROPORÇÃO DE CARGA (QUE DEFINE A PROPORÇÃO DA CARGA DE FLAMBAGEM QUE SERÁ APLICADA DURANTE O IMPACTO) NA PRECISÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA. ....	33
FIGURE 9:GRÁFICO QUE EXPRESSA A INFLUÊNCIA DO INTERVALO DE TEMPO NA PRECISÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA. ....	34
FIGURE 10: GRÁFICO QUE EXPRESSA A INFLUÊNCIA DO EPSILON NA PRECISÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA.....	35
FIGURE 11: GRÁFICO QUE EXPRESSA A INFLUÊNCIA DO INTERVALO DE TEMPO NA PRECISÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA. ....	36
FIGURE 12: GRÁFICO QUE EXPRESSA A INFLUÊNCIA DO PONTO DA ESTRUTURA (ESCOLHIDO PARA SER OBSERVADO O PERFIL DE VELOCIDADE) NA PRECISÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA.....	36
FIGURE 13: GRÁFICO QUE EXPRESSA A INFLUÊNCIA DO FATOR DE PROPORÇÃO DE CARGA (QUE DEFINE A PROPORÇÃO DA CARGA DE FLAMBAGEM QUE SERÁ APLICADA DURANTE O IMPACTO) NA PRECISÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA. ....	37
FIGURE 14: GRÁFICO QUE EXPRESSA A RELAÇÃO EPSILON E NÚMERO DE ITERAÇÕES. ....	37

FIGURE 15: GRÁFICO QUE EXPRESSA A RELAÇÃO INTERVALO DE TEMPO E NÚMERO DE ITERAÇÕES.....	38
FIGURE 16: GRÁFICO QUE EXPRESSA A RELAÇÃO DO INVERSO DO COEFICIENTE DE SEGURANÇA COM O NÚMERO DE ITERAÇÕES.....	38
FIGURE 17: GRÁFICO QUE EXPRESSA A RELAÇÃO DO PARÂMETRO DE RELAXAÇÃO COM O NÚMERO DE ITERAÇÕES.....	39
FIGURE 18: INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE PONTOS DO PERFIL DE VELOCIDADE NA SOLUÇÃO OBTIDA. ....	40

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. OBJETIVOS	10
3. MÉTODOS CONVENCIONAIS DE MEDIÇÃO DE IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS EM CASCAS	11
4. PROBLEMAS INVERSOS	14
5. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	16
6. REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV	20
7. MÉTODO ITERATIVO DE LANDWEBER	23
8. MÉTODO ESTATÍSTICO DE BAYES	26
9. METODOLOGIA	29
<b>9.1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	29
<b>9.2. IMPLEMENTAÇÃO</b>	29
10. RESULTADOS E ANÁLISES	31
<b>10.1. MÉTODO DE TIKHONOV</b>	31
<b>10.2. MÉTODO ITERATIVO DE LANDWEBER</b>	34
<b>10.3. MÉTODO ESTATÍSTICO DE BAYES</b>	39
11. CONCLUSÃO	41
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42

# 1. INTRODUÇÃO

---

Nós últimos 30 anos [1] o número de publicações relacionadas a problemas inversos cresceu de forma rápida. Este fato se deve à crescente demanda de tecnologia e conhecimento das ciências naturais, as quais nos levam à formulação de problemas que devem ser interpretados e solucionados por meio da busca da causa de conseqüências conhecidas. É exatamente este caminho, contrário à ordem natural que caracteriza a formulação de um problema inverso.

A necessidade de medir imperfeições geométricas em estruturas axissimétricas, como cilíndricas, é um fato corriqueiro na engenharia, como na aeronáutica, na indústria de estruturas off-shore, bem como em aplicações que envolvem grandes estruturas como é o caso de torres de resfriamento, como citado em [3].

Dada esta necessidade e a complexidade dos atuais métodos de medição, a apresentação de uma abordagem indireta, que permite a obtenção dessas imperfeições superficiais através do conhecimento do perfil de velocidade de um único ponto da superfície da estrutura quando ela é submetida a um carregamento repentino e súbito é bastante interessante do ponto de vista prático e econômico.

Apresentação desta abordagem indireta recai na formulação de um problema inverso mal-posto. Portanto, é necessária a aplicação de um método de regularização para lidar com a questão de mal-acondicionamento do problema.

## 2. OBJETIVOS

---

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma abordagem indireta que permite a obtenção das imperfeições geométricas de uma casca cilíndrica por meio do conhecimento da resposta dinâmica de um único ponto da estrutura quando ela é submetida a uma carga de impulso. Sendo assim, diferentemente dos métodos convencionais, não há a necessidade de se medir diretamente a imperfeição geométrica presente ao longo de toda a superfície da estrutura.

Para atingir o objetivo enunciado acima o trabalho está estruturado da seguinte maneira:

- Apresentação dos argumentos matemáticos citados nas referências bibliográficas os quais asseguram a confiabilidade do método, bem como as hipóteses adotadas.
- Apresentação do problema físico, ou seja, como é modelado matematicamente a dinâmica da estrutura quando submetida a um carregamento repentino e instantâneo.
- Apresentação de três métodos de regularização que permitem lidar com a questão de mal acondicionamento do problema.
- Implementação numérica dos três métodos de regularização, seguido da análise comparativa de desempenho entre os três.

### 3. MÉTODOS CONVENCIONAIS DE MEDIÇÃO DE IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS EM CASCAS

---

Levando-se em conta grandes estruturas de concreto como torres de resfriamento que possuem dimensões da ordem de 60 m a 160 m de altura e espessura entre 0.1 m a 0.25 m, os desvios superficiais de geometria podem atingir de duas ou três vezes a dimensão da espessura, como é mencionado em [3].

Um modo de mapear a superfície de uma casca de revolução é por meio da triangulação utilizando teodolitos. Para a aplicação desta técnica é necessário a utilização de várias estações de medição, sendo que duas delas são utilizadas simultaneamente para obter a informação de um ponto da estrutura como é mostrado na figura 1.

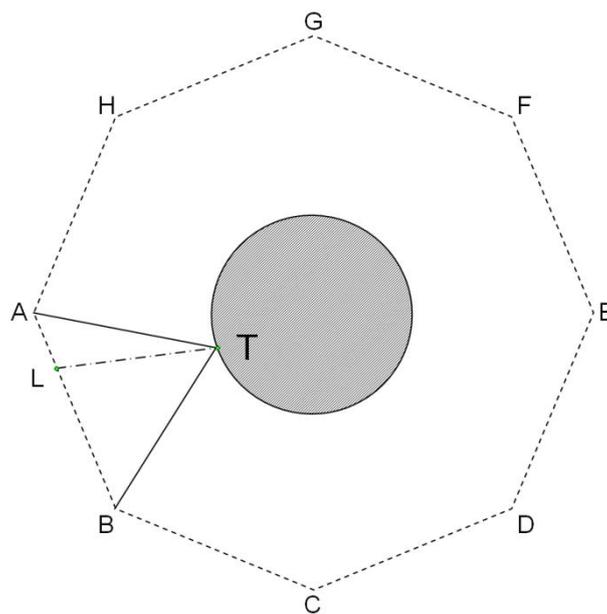
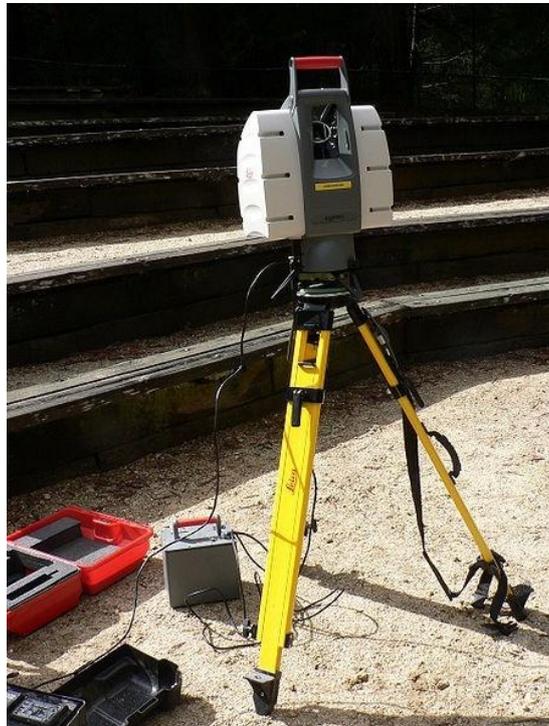


Figure 1: Processo de medição de torres de resfriamento utilizando teodolitos.

A dimensão da casca cilíndrica é obtida através da linha poligonal ABCDEFGH que interliga as estações de medição. Para exemplificar, toma-se o ponto T da superfície da estrutura cilíndrica. O ponto T é identificado na superfície através de um laser que se encontra localizado em L. Sendo assim, a posição angular de T é obtida através das estações A e B determinando, portanto, o comprimento do segmento AB.

Para torres de resfriamento o número de pontos que necessitam ser medidos é da ordem de  $10^3$  para que se obtenha o mapeamento completo da superfície [3]

Outra técnica empregada com esta finalidade é o uso do dispositivo laser “range-finder”. Apenas uma observação é necessária para se obter a distância LT, diferentemente do método anterior.



**Figure 2: Laser “range finder” utilizado em medição de imperfeições em estruturas de grande escala.  
Fonte[6].**

Uma terceira maneira de se obter o perfil desejado é por meio da fotogrametria. Tratando-se de estruturas cilíndricas de dimensão reduzidas, as quais são geralmente utilizadas em laboratórios como corpo de prova para avaliação das características de estruturas de grande dimensão, a importância em se determinar as imperfeições geométricas superficiais está associada à avaliação da carga de flambagem. Atualmente as técnicas utilizadas para se fazer essa aferição consistem no mapeamento da superfície interna da estrutura por meio de um relógio apalpador.

Com base neste breve apanhado de técnicas empregadas para a medição da imperfeição geométrica de superfícies cilíndricas, observa-se que se trata de procedimentos complexos. Portanto, uma abordagem indireta que não necessita do mapeamento direto do perfil superficial de toda a extensão do cilindro vem a simplificar esta tarefa bastante árdua. Isto porque a abordagem proposta por este trabalho necessita de medições em apenas um ponto da superfície, diferentemente

dos métodos citados anteriormente que exigem medições ao longo de grandes extensões.

## 4. PROBLEMAS INVERSOS

---

Para tornar claro o conceito associado a problemas inversos, nesta seção está reproduzido o exemplo dado por [1].

Partindo de um modelo matemático que descreve um processo físico e assumindo que este modelo fornece uma descrição do comportamento do sistema, das condições de operação e das grandezas envolvidas: entrada, parâmetros do sistema e saída, três tipos de formulação podem ser encontradas.

São elas:

- O problema direto: conhecida a entrada e os parâmetros do sistema deve-se encontrar sua saída.
- O problema de reconstrução: conhecido os parâmetros do sistema e a saída, determinar a entrada do sistema.
- O problema de identificação: conhecida a entrada e a saída, descobrir os parâmetros do sistema.

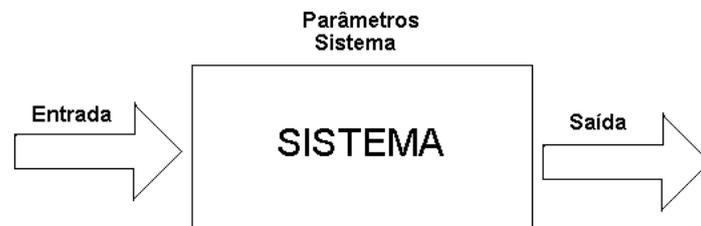


Figure 3: Esquema de um sistema e seus parâmetros.

O primeiro caso é denominado problema direto, uma vez que ele é orientado de acordo com a relação causa-efeito. Já os dois últimos casos são denominados problema inverso, uma vez que ambos tratam de encontrar causas desconhecidas para conseqüências conhecidas.

Em alguns casos, o problema inverso pode ser convertido facilmente em um problema direto. Por exemplo, supondo que  $A$  seja o operador que descreve o

sistema em questão e que, além disso,  $A^{-1}$  seja inversível e conhecida, temos que o problema de reconstrução pode ser resolvido por:  $x = A^{-1}y$ , dado que  $x$  é a entrada e  $y$  é a saída. Entretanto, se a saída  $y$  não estiver no domínio de  $A^{-1}$  o conhecimento da inversa de  $A$  não soluciona o problema. Este tipo de situação é comumente encontrado em problemas nos quais a saída é determinada de forma imprecisa ou encontra-se distorcida devido a distúrbios inerentes a processos de medição, por exemplo. Em outros casos,  $A^{-1}$  é um operador mal comportado, ou seja, aproxima-se da condição de operador singular. Isso causa grande instabilidade na resposta obtida tornando-a praticamente inútil do ponto de vista de engenharia. Neste contexto que são empregados os métodos de regularização. Estes métodos têm por objetivo afastar o operador  $A^{-1}$  da região de operação singular, tornando confiável (dentro de uma determinada margem) a solução obtida para o problema. Neste trabalho são empregados três métodos de regularização. Após a implementação de cada um deles é realizado um estudo comparativo.

Para a análise completa de um problema inverso, além do que foi dito, é fundamental levar em conta a unicidade da reconstrução do dado que se deseja encontrar, ou seja, se a solução obtida pelo método é de fato única. Outro aspecto importante diz respeito à estabilidade do modelo matemático que descreve o sistema em análise.

Neste trabalho a unicidade da reconstrução da imperfeição inicial da superfície está provada em [8]. Já a estabilidade do sistema está associada ao grau em que os erros inerentes aos dados que se tem conhecimento interferem na confiabilidade da solução obtida para o problema em análise. Em outras palavras, significa saber se um pequeno distúrbio no dado obtido ou observado conduz a um pequeno ou grande distanciamento da solução real e exata. Neste trabalho, a avaliação quanto à estabilidade será feita por meio de análises numéricas.

## 5. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema formulado trata da análise de uma estrutura cilíndrica com imperfeições superficiais, que devem ser determinadas por meio da análise da resposta dinâmica de um único ponto da estrutura quando submetida a um impacto.

O problema trata especificamente de uma casca cilíndrica de espessura  $h$ , raio  $R$ , comprimento  $L$ , submetida a uma carga normal de impacto de valor  $N$ . Além disso, o material da estrutura é homogêneo de densidade  $\rho$ , módulo de Young  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ . A imperfeição superficial inicial é representada por  $\omega_0: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \omega_0 \in L^2([0, L])$ . O problema descrito acima está representado pela figura abaixo.

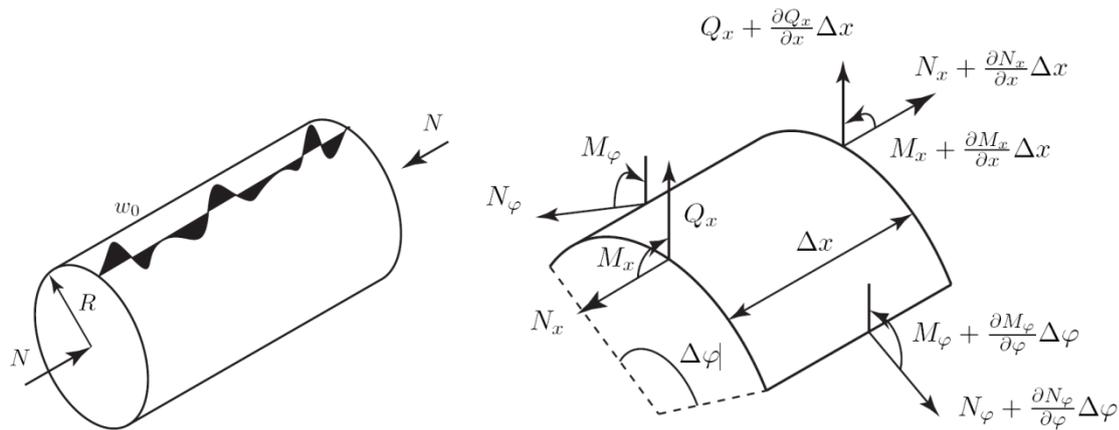


Figure 4: Representação do problema físico. Fonte[8]

A equação que descreve a dinâmica desta estrutura submetida ao carregamento  $N$  repentino e instantâneo é obtida através da análise mecânica de um elemento diferencial da estrutura [2].

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh}{R^2} w = -N \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \forall x \in [0, L], \forall t \in ]0, +\infty) \quad (1)$$

Sendo que  $w$  é a amplitude da resposta dinâmica do ponto da estrutura e  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  é a rigidez à flexão da casca cilíndrica. É importante observar que  $N$  é uma carga de impacto. Portanto, após sua aplicação repentina a estrutura encontra-se

em repouso. As condições de contorno da estrutura são dadas pelas seguintes equações:

$$w(x, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, x = 0 \text{ e } x = L \quad (2)$$

$$w(x, t) = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, t = 0 \quad (3)$$

A carga  $N$  é definida e dada pela inequação:

$$N^2 < \frac{4DEh}{R^2} \quad (4)$$

Para adimensionalizar o problema adotou-se as seguintes variáveis:

$$u = \frac{\omega}{h}; u_0 = \frac{\omega_0}{h} \quad (5)$$

$$\xi = \frac{x}{L}; \tau = \omega_1 t; \alpha = \frac{N}{N_{crit}} \quad (6)$$

Onde  $\omega_1$  é a primeira freqüência natural do sistema, a qual é independente das imperfeições iniciais da estrutura e  $N_{crit}$  é a carga crítica de flambagem da estrutura perfeitamente cilíndrica (sem imperfeições). Os parâmetros descritos acima são dados pelas equações:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D\pi^4}{\rho h L^4} + \frac{E}{\rho R^2}}; N_{crit} = \frac{D}{L^2} \gamma \quad (7)$$

$$\gamma = \frac{4L^2}{Rh} \sqrt{3(1 - \nu^2)}; \beta = \frac{EhL^4}{DR^2} \quad (8)$$

A equação (1) na versão adimensional é representada por:

$$D \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + N \frac{\partial^2 u}{\partial x \xi^2} + (\beta + \pi^4) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \beta u = -\alpha \gamma \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2}, \forall \xi \in [0, 1], \forall \tau \in ]0, +\infty) \quad (9)$$

As condições de contorno e iniciais adimensionalizadas são dadas por:

$$u(\xi, \tau) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0, \xi = 0 \text{ e } \xi = 1 \quad (10)$$

$$u(\xi, \tau) = \tau = 0, \tau = 0 \quad (11)$$

Para avaliar de forma bastante genérica as imperfeições iniciais da estrutura adotou-se a seguinte formulação [4] para  $\omega_0(x)$  que no formato adimensional é expresso por  $u_0(\xi)$ :

$$u_0(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi\xi) \quad (12)$$

A partir do isomorfismo entre  $L^2([0,1])$  e  $l^2$  temos que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ . Por separação de variáveis obtém-se que  $u(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\tau) \sin(n\pi\xi)$ . Expressando de forma mais completa:

$$u(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \frac{\alpha\gamma n^2 (1 - \cos(n\pi\xi))}{r_n^2 (\beta + \pi^4)} \right] \sin(n\pi\xi) \quad (13)$$

$$\text{Onde } r_n = \frac{n\pi}{\sqrt{\beta + \pi^4}} \sqrt{n^2 \pi^2 - \alpha\gamma + \frac{\beta}{n^2 \pi^2}}. \quad (14)$$

Derivando a equação (13) temos que o perfil de velocidade na estrutura é definido por:

$$\frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} = v(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\alpha\gamma n^2 \sin(n\pi\xi)}{r_n^2 (\beta + \pi^4)} \sin(r_n \tau) \quad (15)$$

É provado em [8] a unicidade da recuperação do perfil de imperfeições iniciais. Além disso, é provado que basta a análise do perfil de velocidade em um único ponto  $\xi_0$  durante um intervalo de tempo limitado para que seja possível determinar  $A_n$  e assim obter as imperfeições geométricas iniciais da estrutura.

Sendo assim, substituindo  $\xi$  por  $\xi_0$  temos:

$$v(\xi_0, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\alpha\gamma n^2 \sin(n\pi\xi_0)}{r_n^2 (\beta + \pi^4)} \sin(r_n \tau) \quad (16)$$

Portanto, após a determinação das grandezas envolvidas no problema através das equações explicitadas acima, temos em termos matriciais o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} v(\tau_1) \\ v(\tau_2) \\ v(\tau_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(1, \tau_1) & \phi(2, \tau_1) & \phi(p, \tau_1) \\ \phi(1, \tau_2) & \phi(2, \tau_2) & \phi(p, \tau_2) \\ \phi(1, \tau_m) & \phi(2, \tau_m) & \phi(p, \tau_m) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_p \end{pmatrix} \quad (17)$$

Sendo que  $\phi(n, \xi_0)$  é determinado pela equação abaixo de acordo com (16):

$$\phi(n, \xi_0) = \frac{\alpha\gamma n^2 \sin(n\pi\xi_0)}{r_n^2 (\beta + \pi^4)} \sin(r_n \tau) \quad (18)$$

Portanto, conhecendo  $v(\xi_0, \tau)$  por meio do processo experimental e determinado  $\phi(n, \xi_0)$  analiticamente, é possível encontrar os coeficientes  $[A_n]$  e assim determinar  $\omega_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$ . (19)

A formulação inversa da equação apresentada em (17) e dada por:

$$[A] = [\phi]^{-1}[v] \quad (20)$$

## 6. REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV

---

Como mencionado anteriormente, quando tratamos de problemas mal-postos, complicações podem ocorrer quando deseja-se encontrar a solução da equação do tipo  $[A][x] = [y]$ .

Posto isto, façamos as seguintes considerações:

$H_1, H_2$  são espaços de Hilbert de dimensão infinita com os produtos internos definidos por  $\langle x, y \rangle_j, x, y \in H_j, j = 1, 2$  e  $A: H_1 \rightarrow H_2$  um operador compacto.

Os espaços de Hilbert são uma generalização abstrata dos espaços Euclidianos  $\mathbb{R}^n$  e unitário  $\mathbb{C}^n$  onde a notação central é o produto interno. A partir do produto interno obtemos a norma e o conceito de ortogonalidade entre vetores no espaço.

Um operador linear  $T$  é dito compacto se  $T: E \rightarrow F$  para toda seqüência limitada  $(x_n) \subset E$ , a seqüência  $(Tx_n)$  possuir uma subseqüência convergente. Como exemplo de espaço normado temos o espaço de Hilbert.

Sendo assim, de acordo com [5] temos a seguinte definição:

**Definição:** Seja  $\delta > 0$  uma constante dada. A solução regularizada de Tikhonov  $x_\delta \in H_1$  (pertencente ao espaço de Hilbert) é minimizada pelo funcional, dado que existe um mínimo:

$$F_\delta(x) = \|[A][x] - [y]\|^2 + \delta\|x\|^2 \quad (21)$$

O parâmetro  $\delta$  apresentado é denominado parâmetro de regularização. Ao introduzir este parâmetro substituímos a matriz  $[A]$  por outra “semelhante”, porém isenta do problema de mal- acondicionamento.

A escolha do parâmetro de regularização  $\delta$  é baseada no nível de ruído da medida  $[y]$ . Assumindo que  $\varepsilon > 0$  seja uma estimativa da norma do erro do vetor  $\|[y] - [y_0]\| < \varepsilon$ ,  $f(\delta) = \|[A][x_\delta] - [y]\| = \varepsilon$ , isto é, a solução regularizada não deve ser mais precisa do que o nível do ruído.

Aplicando o método descrito acima para o problema de determinação de imperfeições geométricas em superfícies cilíndricas temos que a velocidade de um determinado ponto da estrutura em certo instante do tempo é dada pela equação:

$$v(\zeta_0, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi(n, \tau, \zeta_0) \quad (22)$$

Tendo sido aquisitados (de acordo com algum método de medição) os valores da velocidade em  $\zeta_0$  durante um intervalo de tempo limitado, o sistema matricial que descreve o problema em questão é representado por:

$$\begin{pmatrix} v(\tau_1) \\ v(\tau_2) \\ v(\tau_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(1, \tau_1) & \phi(2, \tau_1) & \phi(p, \tau_1) \\ \phi(1, \tau_2) & \phi(2, \tau_2) & \phi(p, \tau_2) \\ \phi(1, \tau_m) & \phi(2, \tau_m) & \phi(p, \tau_m) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_p \end{pmatrix} \quad (23)$$

De forma mais compacta:

$$[v] = [\phi] \times [A] \quad (24)$$

Lembrando que os valores de  $\phi(n, \tau)$  são conhecidos, de acordo com (18), deseja-se determinar os coeficientes  $[A_n]$ . Temos que:  $[A] = [\phi]^{-1} \times [v]$

Como dito anteriormente, temos que o problema inverso acima é mal-posto. Sendo assim, é necessária a aplicação de um método de regularização. O objetivo é a minimização da norma  $F(A_n) = \|[\phi][A_\delta] - [v]\|^2$  onde  $[A_\delta]$  é a solução regularizada.

$$F(A_n) = \sum_{n=1}^p (\sum_{j=1}^m A_n \phi(n, \tau_j) - v(\tau_j))^2 \quad (25)$$

Uma condição para o mínimo de  $F(A_n)$  é obtido para:

$$\frac{\partial F(A_n)}{\partial A_k} = 0 \quad (26)$$

Calculando a derivada parcial de (25) em função dos coeficientes  $[A_n]$  temos:

$$\sum_{n=1}^p \sum_{j=1}^m A_n \phi^2(n, \tau_j) = \sum_{n=1}^p \sum_{j=1}^m v(\tau_j) \phi(n, \tau_j) \quad (27)$$

Em termos matriciais a equação (25) resulta no sistema normal dado por:

$$[\phi]^t [\phi] [A] = [\phi]^t [v] \quad (28)$$

Se  $[\phi]^t [\phi] = [B]$  e  $[\phi]^t [v] = [C]$  temos que:

$$[A] = [B]^{-1} [C] \quad (29)$$

Ao implementar numericamente o problema descrito por (29) nota-se que se trata de um problema mal posto, que opera próximo a região singular. Sendo assim, aplica-se o método de regularização de Tikhonov de acordo com a equação (21).

Temos então a minimização da norma dada por:

$$F(A_n) = \|[\phi][A_\delta] - [v]\|^2 + \delta\|[A_\delta]\|^2 \quad (30)$$

Que analogamente ao que foi desenvolvido acima resulta em:

$$([\phi^t][\phi] + [I]\delta) \times [A] = [\phi]^t[v] \quad (31)$$

Se  $[\phi]^t[\phi] + [I]\delta = [B]$  e  $[\phi]^t[v] = [C]$  temos:

$$[A] = [B]^{-1}[C] \quad (32)$$

## 7. MÉTODO ITERATIVO DE LANDWEBER

---

O método iterativo de Landweber é aplicado para equações lineares e não lineares. É provado em [1] que para todos os casos a convergência de resultados é obtida mesmo quando há a presença de ruído no dado imputado. Neste trabalho, é avaliado o sistema  $[A][x] = [y]$ .

Sabe-se que nas circunstâncias reais os dados possuem erro de medição, portanto, somente dados aproximados  $y^\varepsilon$  tal que  $\|[y] - [y^\varepsilon]\| \leq \varepsilon$  estão disponíveis (dado que  $\varepsilon$  é o grau de ruído).

Tomando  $[A]$  temos que a solução generalizada é dada por  $[A^*][A][x] = [A^*][y]$  onde  $[A^*]$  é a adjunta de  $[A]$ .

O método iterativo que fornece a solução do sistema normal dado é baseado em equações de ponto fixo do tipo:

$$[x] = [x] - [A^*]([A][x] - [y]) = ([I] - [A^*][A])[x] + [A^*][y] \quad (33)$$

A iteração de ponto fixo acima sugere a iteração explícita dada por:

$$[x_{k+1}] = [x_k] - \lambda[A^*]([A][x_k] - [y]), k \geq 0 \quad (34)$$

Um ponto fixo de uma função  $\varphi(x)$  é um número real  $\zeta$  tal que  $\zeta = \varphi(\zeta)$ . Seja  $\zeta$  uma raiz da equação  $f(x) = 0$ , isolada no intervalo  $I = [a, b]$ . Seja  $\varphi$  uma função de iteração para a equação  $f(x) = 0$ . A partir de  $f(x) = 0$ , obtém-se  $x = \varphi(x)$  se:

- $\varphi(x)$  e  $\varphi'(x)$  (derivada de  $\varphi(x)$ ) são contínuas em  $I$
- $\varphi(x) \in I$  para qualquer  $x \in I$
- $|\varphi'(x)| \leq M < 1$ , para qualquer  $x \in I$
- $x_0 \in I$

Então a sucessão  $\{x_k\}$  gerada pelo processo iterativo  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  converge para  $\zeta$ .

O parâmetro  $\lambda$  introduzido acima é um fator de relaxação.  $\lambda < 1$  se  $\|[A]\| > 1$ . Caso contrário,  $\lambda = 1$ .

Quanto ao critério de parada é adotado o princípio da discrepância, o qual afirma que o processo iterativo deve parar no passo  $k = k(\varepsilon, y^\varepsilon)$  onde:

$$\| [y^\varepsilon] - [A][x_k^\varepsilon] \| \leq \tau \varepsilon, \text{ sendo } \tau > 1. \quad (35)$$

Aplicando este método ao problema de determinação das imperfeições geométricas em superfícies cilíndricas temos:

$$(A_n) \xrightarrow{\phi} f(\tau) = \sum_{n=1}^p A_n \phi(n, \tau) \quad (36)$$

Ou seja, aplicando o operador  $\phi$  em  $(A_n)$  obtém-se a seqüência dada por (16).

Agora, aplicando o operador adjunto de  $\phi$  ( $\phi^*$ ) em  $f(\tau)$ , que é a seqüência expressa em (25) obtém-se uma nova seqüência dada abaixo por (37):

$$f(\tau) \xrightarrow{\phi^*} g(\tau) = (c_i) = \sum_{i=1}^p \int_a^b f(\tau) \phi(i, \tau) \delta \tau \quad (37)$$

Onde  $a$  e  $b$  são os limites do intervalo de integração.

Sendo assim, a equação acima (37) pode ser reescrita como:

$$(c_i) = \sum_{i=1}^p \int_a^b \sum_{n=1}^p A_n \phi(n, \tau) \phi(i, \tau) \delta \tau \quad (38)$$

Isolando os termos constantes:

$$f(\tau) \xrightarrow{\phi^*} g(\tau) = \sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^p A_n \int_a^b \phi(n, \tau) \phi(i, \tau) d\tau \quad (39)$$

Portanto, a equação (34) reescrita em função dos parâmetros deste problema é dada por:

$$[A_{k+1}] = [A_k] - \lambda [\phi^*] ([\phi][A_k] - [v]) \quad (40)$$

Sendo assim, o termo dado por  $[\phi^*][\phi][A_k] = g(\tau)$  é representado pelo sistema:

$$g(\tau) = \begin{pmatrix} \int_a^b \phi(1, \tau) \phi(1, \tau) d\tau & \int_a^b \phi(1, \tau) \phi(2, \tau) d\tau & \int_a^b \phi(1, \tau) \phi(p, \tau) d\tau \\ \int_a^b \phi(2, \tau) \phi(1, \tau) d\tau & \int_a^b \phi(2, \tau) \phi(2, \tau) d\tau & \int_a^b \phi(2, \tau) \phi(p, \tau) d\tau \\ \int_a^b \phi(p, \tau) \phi(1, \tau) d\tau & \int_a^b \phi(p, \tau) \phi(2, \tau) d\tau & \int_a^b \phi(p, \tau) \phi(p, \tau) d\tau \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_p \end{pmatrix} \quad (41)$$

E analogamente ao resultado obtido em (37), aplicando  $v(\tau) \xrightarrow{\phi^*} s(\tau)$  temos:

$$v(\tau) \xrightarrow{\phi^*} s(\tau) = (c_i) = \sum_{i=1}^p \int_a^b v(\tau) \phi(i, \tau) \delta\tau \quad (42)$$

De forma mais clara resulta em:

$$s(\tau) = [\phi^*][v] = \begin{pmatrix} \int_a^b v(\tau) \phi(1, \tau) d\tau \\ \int_a^b v(\tau) \phi(2, \tau) d\tau \\ \int_a^b v(\tau) \phi(p, \tau) d\tau \end{pmatrix} \quad (43)$$

Portanto, a equação (40) é reescrita de acordo com:

$$[A_{k+1}] = [A_k] - \lambda([g(\tau)] - [s(\tau)]) \quad (44)$$

Quanto ao critério de parada dado em (35) temos:

$$\|[v] - [f(\tau)][A_k]\| \leq \tau\varepsilon \quad (45)$$

Portanto, o processo iterativo é encerrado para o  $k$  cuja norma dada acima respeita a inequação dada em (45).

## 8. MÉTODO ESTATÍSTICO DE BAYES

---

A idéia da regularização por métodos estatísticos é reformular o problema inverso de tal forma que ele passe a ser encarado como um problema de busca de informações estatísticas a respeito das variáveis e parâmetros que envolvem o modelo em estudo.

Essa abordagem estatística para problemas inversos está baseada em quatro princípios segundo [5]. Eles são:

- Todas as variáveis do modelo são modeladas como variáveis aleatórias.
- A aleatoriedade associada às variáveis descreve o grau de informação que temos sobre elas.
- O grau de informação relativo a tais variáveis é expresso na forma de distribuições probabilísticas.
- A solução do problema inverso, dentro desta abordagem, é expressa em distribuição de probabilidade.

Diferentemente da abordagem clássica de métodos de regularização, que fornecem uma estimação a respeito da variável desconhecida, a regularização por métodos estatísticos produz uma distribuição que pode ser utilizada para se obter uma estimação do valor que se deseja determinar.

Supondo que o fenômeno analisado seja dependente das variáveis  $X_1, X_2 \dots X_n$  e que o fato a ser observado combine diferentes níveis de cada uma das variáveis aleatórias. Por exemplo, para a variável  $X_1$  tem-se os níveis  $x_1 = x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p}$ , supondo que haja  $p$  diferentes combinações de cada uma das variáveis. De acordo com [7] assume-se que o fenômeno pode ser modelado da seguinte forma:

$$[y(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \beta_0 + \sum_{i=1}^q [\beta_i] X[g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (46)$$

Ou seja, de forma mais compacta  $[y] = [g][\beta]$ .

Os dados experimentais  $[y^*]$  são gerados de um processo aleatório da forma

$$[y^*(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \beta_0 + \sum_{i=1}^q [\beta_i] X[g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] + [\varepsilon] \quad (47)$$

Onde  $\varepsilon$  representa o erro associada à medida. Tratando da formulação probabilística do problema temos que  $\varepsilon$  é uma distribuição normal padrão (variância  $h^{-1} = 1$  e média nula).

A idéia por traz desta formulação probabilística é a seguinte: deseja-se maximizar a probabilidade de que o valor de  $y$  obtido experimentalmente ( $y^*$ ) de fato condiz com o valor real, ou seja, aquele que é isento de erro. Para isto, temos o seguinte sistema:

$[y^*] = [g][\beta^*]$ . Portanto, conhecendo  $[g]$  e  $[y^*]$ , basta determinar o valor do vetor  $[\beta^*]$  que maximiza a probabilidade de que o valor  $[y^*] \rightarrow [y]$  (exato).

Para determinar o valor de  $[\beta^*]$  define-se a função densidade probabilidade de  $[y]$ .

$$f(y^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{h}{2} ([y^*] - (\beta_0 + \sum_{i=1}^q [\beta_i] \times [g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]))^2} \quad (48)$$

Expressando de forma mais genérica e em função da probabilidade condicional  $f(y^*|\beta)$  temos:

$$f(y^*|\beta) = \frac{1}{\sqrt{2^p}} e^{-\frac{h}{2} ([y^*] - [g][\beta])^T ([y^*] - [g][\beta])} \quad (49)$$

De acordo com a regra de Bayes temos que:

$$f(\beta|y^*) = \frac{f(y^*|\beta)f(\beta)}{f(y^*)} \quad (50)$$

Portanto, deseja-se maximizar a função  $f(\beta|y^*)$  para que o valor de  $y^*$  obtido experimentalmente esteja o mais próximo possível do valor real. Sendo assim, é necessário determinar a distribuição de probabilidade  $f(\beta)$ . Essa probabilidade é determinada a partir do conhecimento prévio que se tem em relação a  $\beta$ .

A função  $f(\beta)$  é dada por:

$$f(\beta) = e^{-\left(\left(\frac{\beta_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\beta_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\beta_n - \mu_n}{\sigma_n}\right)^2\right)} \quad (51)$$

A média e a variância associadas a cada um dos  $\beta_i$  são determinadas de acordo com o conhecimento prévio daquele que aplica este método de regularização. Este é um dos aspectos interessantes dessa modelagem.

A  $f(y^*)$  é calculada de acordo com os dados experimentais que se tem em mãos. Portanto,  $f(y^*)$  é um número conhecido (uma constante). Sendo assim, como se deseja maximizar (49), todas as constantes podem ser “ignoradas”.

Trabalhando com os parâmetros do problema deste trabalho, determinação das imperfeições geométricas em superfícies cilíndricas, obtemos as equações a seguir, para  $h = 1$ :

$$f(v^*|A) = \frac{1}{\sqrt{2}^m} e^{-\frac{1}{2}([v^*]-[\phi][A])^T([v^*]-[\phi][A])} \quad (52)$$

$$f(A) = e^{-\left(\left(\frac{A_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{A_n-\mu_n}{\sigma_n}\right)^2\right)} \quad (53)$$

Para a equação (53) foi adotado variância unitária e a média relacionada a cada um dos coeficientes foi determinada de acordo com a equação  $\mu_n = \frac{1}{n}$ .

Sendo assim, para finalizar, foi realizada a minimização da função:

$$-f(A|v^*)^* = -e^{-\frac{1}{2}([v^*]-[\phi][A])^T([v^*]-[\phi][A])} e^{-\left(\left(\frac{A_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{A_n-\mu_n}{\sigma_n}\right)^2\right)} \quad (54)$$

A função  $f(A|v^*)^*$  é a função  $f(A|v^*)$  desprezando os termos constantes que fazem parte do equacionamento.

## 9. METODOLOGIA

---

Para o desenvolvimento deste projeto seguiu-se a seguinte estrutura metodológica.

### 9.1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Primeiramente foi realizada uma revisão bibliográfica com o objetivo de compreender os seguintes conceitos: problemas inversos, métodos de regularização e compreensão do fenômeno físico que modela o problema em questão.

### 9.2. IMPLEMENTAÇÃO

#### 9.2.1. PROBLEMAS INVERSOS E MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO

A princípio foi realizado um programa em Matlab para a modelagem de um fenômeno físico mais simples, determinação do campo de forças atuante em um corpo de massa  $m$  através do conhecimento da sua trajetória em um plano (problema inverso). Com base nesta aplicação notou-se o problema de mal-condicionamento da matriz que modela o sistema e a necessidade de um método de regularização. Neste sentido, o primeiro método a ser estudado foi o de Tikhonov.

Para gerar a medida, que em uma situação real (não artificial) seria obtida através de um instrumento de medição (acelerômetro, por exemplo), foi implementada a função representada pela equação (25), considerando que  $A_n = 1/n$ . Posteriormente, foi introduzido um erro que corresponderia ao erro intrínseco ao processo de medição.

Sendo assim, fez-se um programa em Matlab e foi avaliada a relação entre os parâmetros de entrada e sua relação com o grau de precisão da solução obtida numericamente.

### *9.2.2. IMPLEMENTAÇÃO DO PROBLEMA DE INTERESSE*

Posteriormente, o mesmo foi feito com o problema de interesse: recuperação de imperfeições geométricas em superfícies cilíndricas aplicando o método de Tikhonov.

### *9.2.3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE LANDWEBER E BAYESIANO*

Tendo sido modelado primeiramente o método de regularização de Tikhonov, posteriormente foram implementados o método iterativo de Landweber e, subsequente, o método estatístico de Bayes.

### *9.2.4. COMPARAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS*

Por fim, foi feito um estudo comparativo entre os métodos de regularização e os resultados obtidos foram tabulados e organizados na forma de gráficos para melhor visualização das conclusões.

## 10. RESULTADOS E ANÁLISES

---

Os resultados obtidos das simulações são apresentados da seguinte maneira: primeiramente, os resultados obtidos de cada uma das implementações individualmente, e em seguida são feitas as análises comparativas.

### 10.1. MÉTODO DE TIKHONOV

Os parâmetros de entrada que envolvem a função implementada para esta aplicação são: *limite\_t* (intervalo de tempo em que é observado o perfil de velocidade), *limite\_n* (número de termos que compõem a série de Fourier que descreve a imperfeição inicial), *x* (ponto da estrutura em que está sendo analisado o perfil de velocidade), *f\_reg* (é o fator de regularização  $\delta$  aplicado na simulação) e por fim, *alfa* (fator de proporção que define o percentual da carga de flambagem que é aplicada no impacto).

```
function [saida]=recupera_regularizacao(limite_t, limite_n, x,f_reg, alfa)
```

Posto isto, foram realizadas algumas simulações para avaliar a influência de cada um dos parâmetros no grau de precisão da solução obtida. A tabela abaixo traz os valores aplicados a cada um dos parâmetros.

SIMULAÇÃO					
Variável	limite_sup	limite_n	x	f_reg	alfa
limite_sup	0.5 a 15	3	0.07	0.000000001	0.5
limite_n	10	1 a 15	0.07	0.000000001	0.5
x	10	3	0 a 0.01	0.000000001	0.5
f_reg	10	3	0.07	0 a 10 <sup>-25</sup>	0.5
alfa	10	3	0.07	0.000000001	0 a 1.5

Table 1: Tabela de valores utilizada para realização das simulações no método de Tikhonov.

Nota-se que nesta etapa foi avaliada uma variável de cada vez. Uma delas é variada enquanto as demais são mantidas constantes.

Com base nestas simulações foram obtidos os seguintes gráficos.

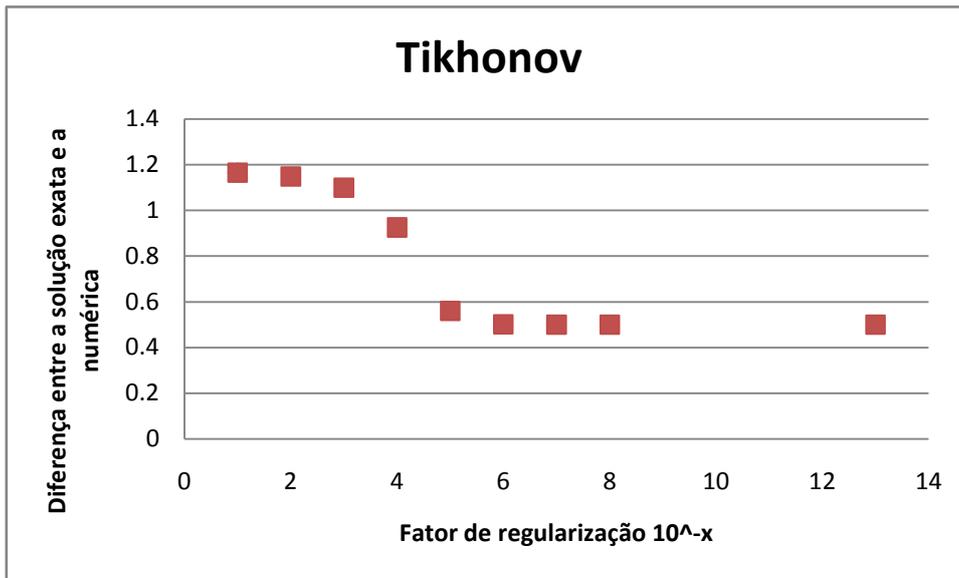


Figure 5: Gráfico que expressa a influência do fator de regularização na precisão da solução obtida.

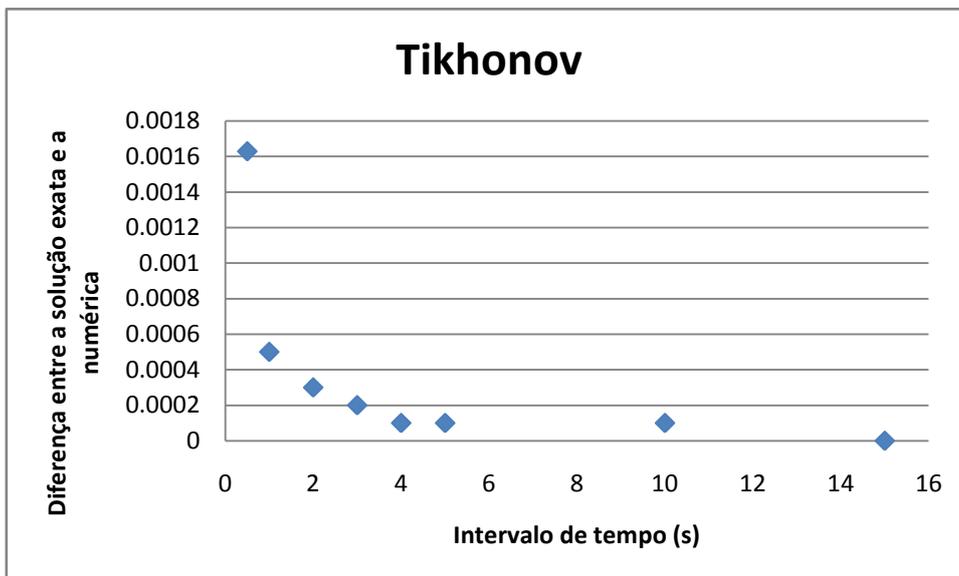


Figure 6: Gráfico que expressa a influência do intervalo de tempo na precisão da solução obtida.

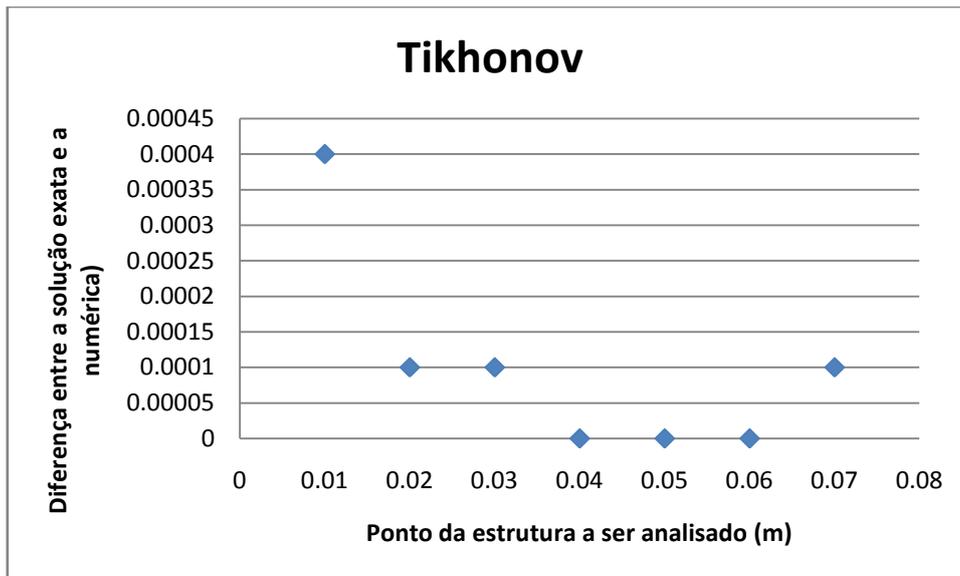


Figure 7: Gráfico que expressa a influência do ponto da estrutura (escolhido para ser observado o perfil de velocidade após o impacto) na precisão da solução obtida.

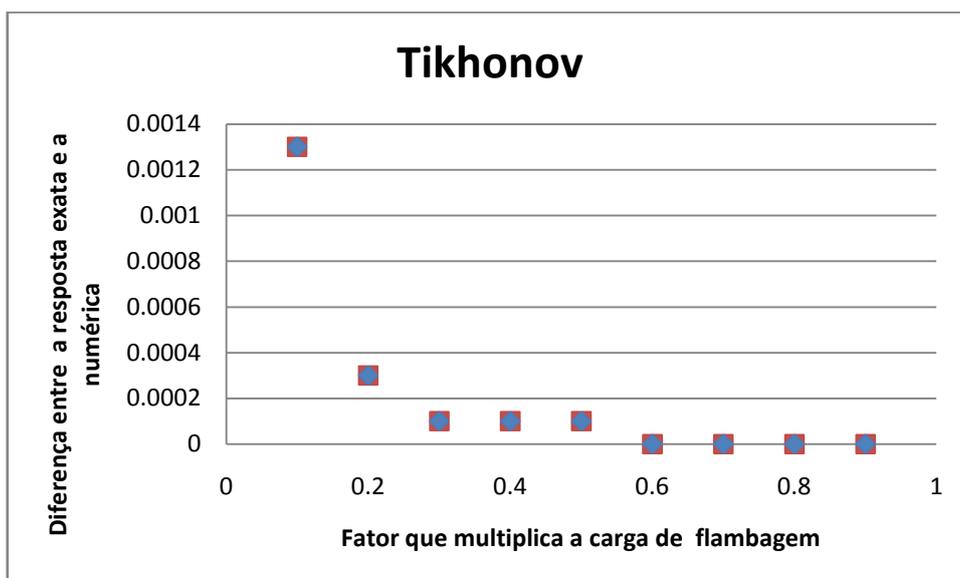


Figure 8: Gráfico que expressa a influência do fator de proporção de carga (que define a proporção da carga de flambagem que será aplicada durante o impacto) na precisão da solução obtida.

É importante salientar que para as simulações realizadas acima os valores que foram fornecidos para compor o perfil de velocidade (que na prática seria obtido durante um processo de medição), foram os valores exatos (calculado de acordo com (16)), ou seja, foi levado em conta o fato da medida ser totalmente isenta de erros. Isso foi realizado com o objetivo de observar a influência de cada um dos parâmetros que modelam o problema ( $\limite\_t$ ,  $\limite\_n$ ,  $x$ ,  $\alpha$ ,  $f\_reg$ ). Com base nisso, foram definidos os valores “ideais” para cada um dos parâmetros. São eles:

$$\text{limite}_n = 3; \text{limite}_t = 20; x = 0.07; \text{alfa} = 0.5; f_{reg} = 10^{-9}$$

O próximo gráfico a ser mostrado (figura 9) foi plotado com base em simulações que foram realizadas levando-se em conta que o perfil de velocidade criado artificialmente possui um erro devido ao processo de medição (diferentemente dos gráficos anteriores), como acontece na prática.

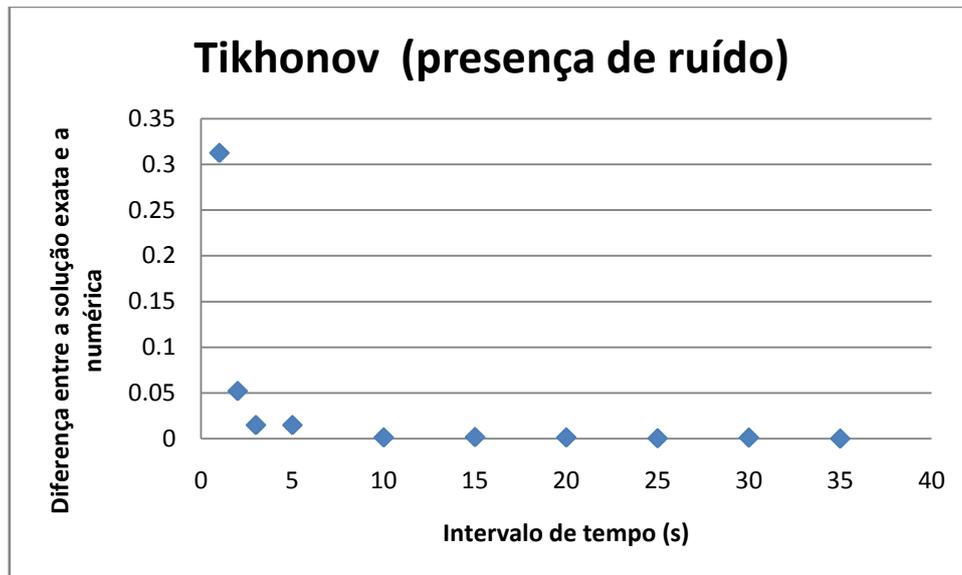


Figure 9: Gráfico que expressa a influência do intervalo de tempo na precisão da solução obtida.

Essa simulação foi realizada variando o parâmetro  $\text{limite}_t$  e mantendo constantes os demais (estes foram definidos com base nas simulações anteriores).

## 10.2. MÉTODO ITERATIVO DE LANDWEBER

Os parâmetros de entrada que envolvem a função implementada para esta aplicação são:  $\text{limite}_t$  (intervalo de tempo em que é observado o perfil de velocidade),  $\text{limite}_n$  (número de termos que compõem a série de Fourier que descreve a imperfeição inicial),  $x$  (ponto da estrutura em que está sendo analisado o perfil de velocidade),  $\text{alfa}$  (fator de proporção que define o percentual da carga de flambagem que é aplicada no impacto),  $\text{lambda}$  (é o fator de relaxação aplicado no método iterativo),  $\text{epsilon}$  (é o fator que define o grau de precisão da solução que será obtida) e  $\text{tau}$  (fator utilizado no critério de parada).

```
function [saida]=landweber(limite_t, limite_n, x, alfa, lambda, epsilon, tau)
```

Da mesma forma que foi feito nas simulações com o método de Tikhonov, primeiramente será analisado o efeito de cada uma das variáveis na precisão da solução obtida. Para tanto, essas primeiras simulações foram realizadas com os valores exatos do perfil de velocidade.

SIMULAÇÃO							
Variável	limite_sup	limite_n	x	alfa	alfa_relax	epsilon	fator
limite_sup	0.5 a 100	3	0.02	0.8	0.99	$10^{-5}$	1.1
limite_n	20	1 a 15	0.02	0.8	0.99	$10^{-5}$	1.1
x	20	3	0 a 0.08	0.8	0.99	$10^{-5}$	1.1
f_reg	20	3	0.02	0.8	0.99	$10^{-5}$	1.1
alfa	20	3	0.02	0 a 1.5	0.1 a 1	$10^{-5}$	1.1
alfa_relax	20	3	0.02	0.8	0.99	$10^{-5}$	1.1
epsilon	20	3	0.02	0.8	0.99	0.1 a $10^{-7}$	1.1
fator	20	3	0.02	0.8	0.99	$10^{-5}$	1.1 a 2

Table 2: Tabela de valores utilizada para realização das simulações no método de Landweber.

Com base nestas simulações foram obtidos os seguintes gráficos:

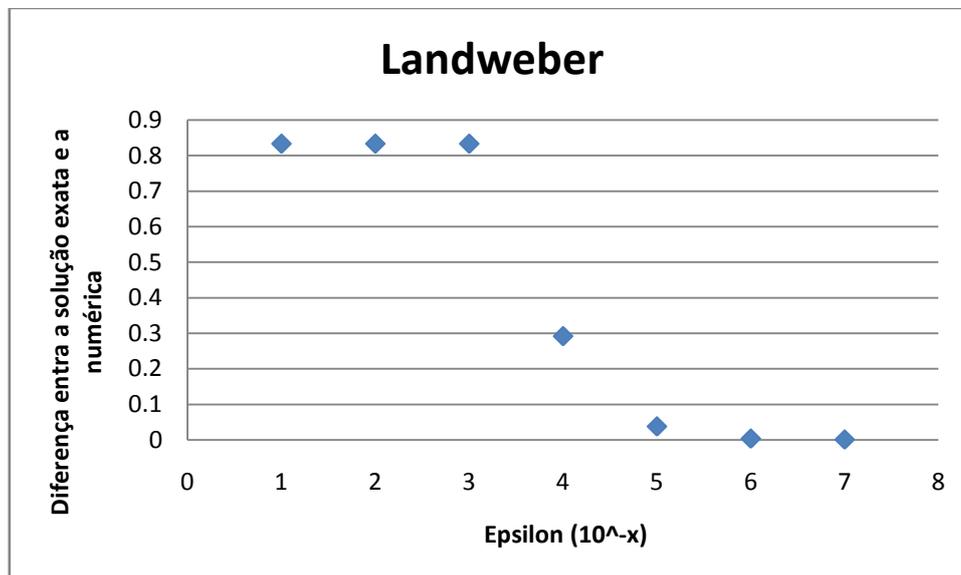


Figure 10: Gráfico que expressa a influência do epsilon na precisão da solução obtida.

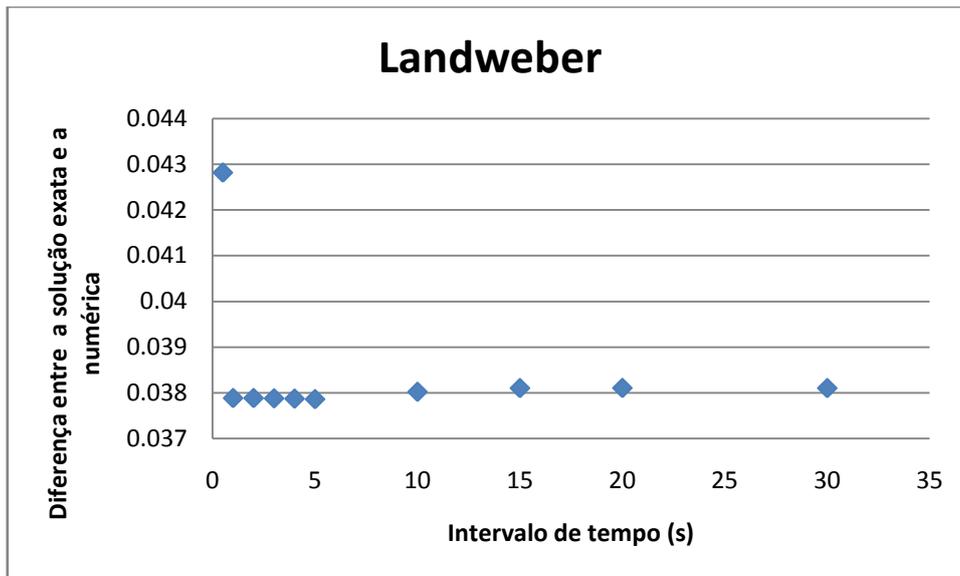


Figure 11: Gráfico que expressa a influência do intervalo de tempo na precisão da solução obtida.

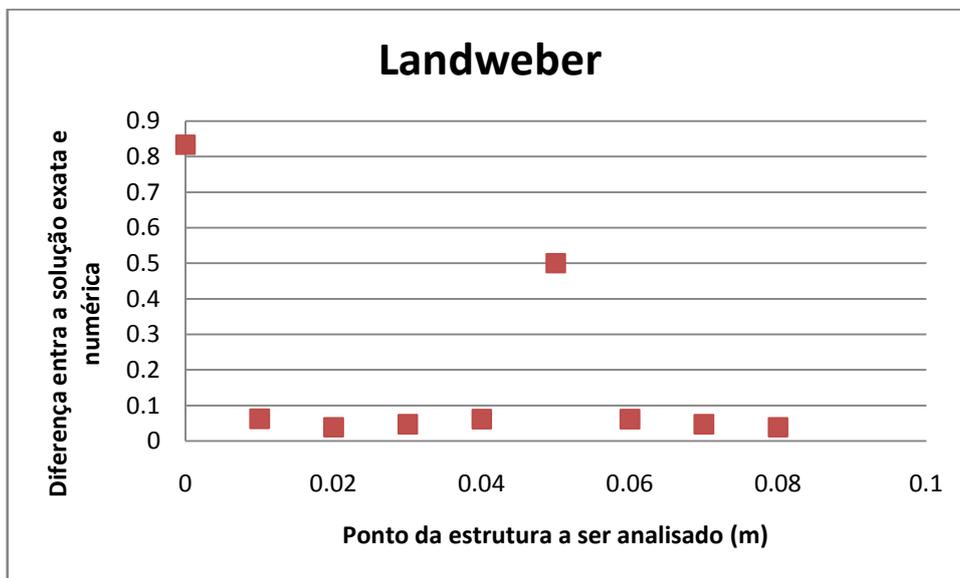


Figure 12: Gráfico que expressa a influência do ponto da estrutura (escolhido para ser observado o perfil de velocidade) na precisão da solução obtida.

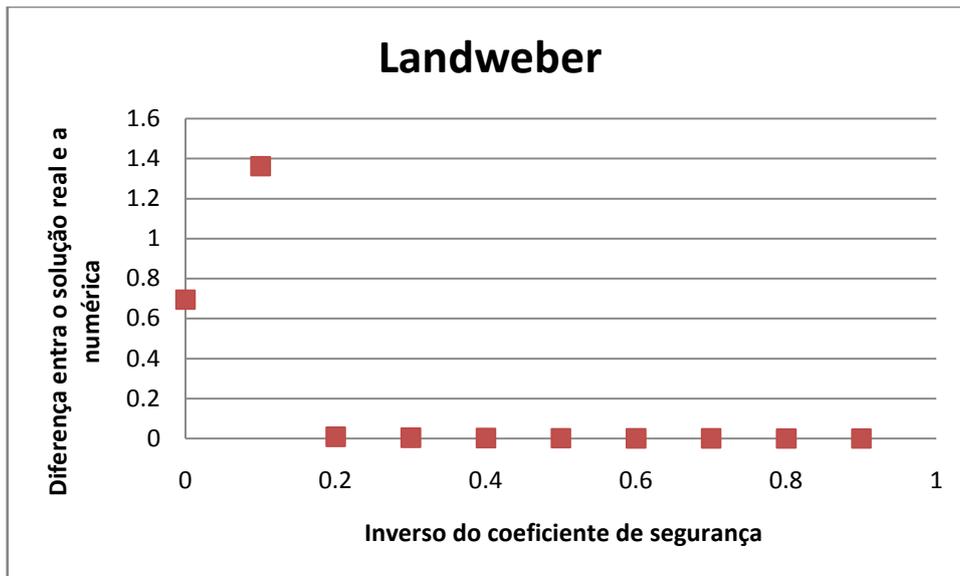


Figure 13: Gráfico que expressa a influência do fator de proporção de carga (que define a proporção da carga de flambagem que será aplicada durante o impacto) na precisão da solução obtida.

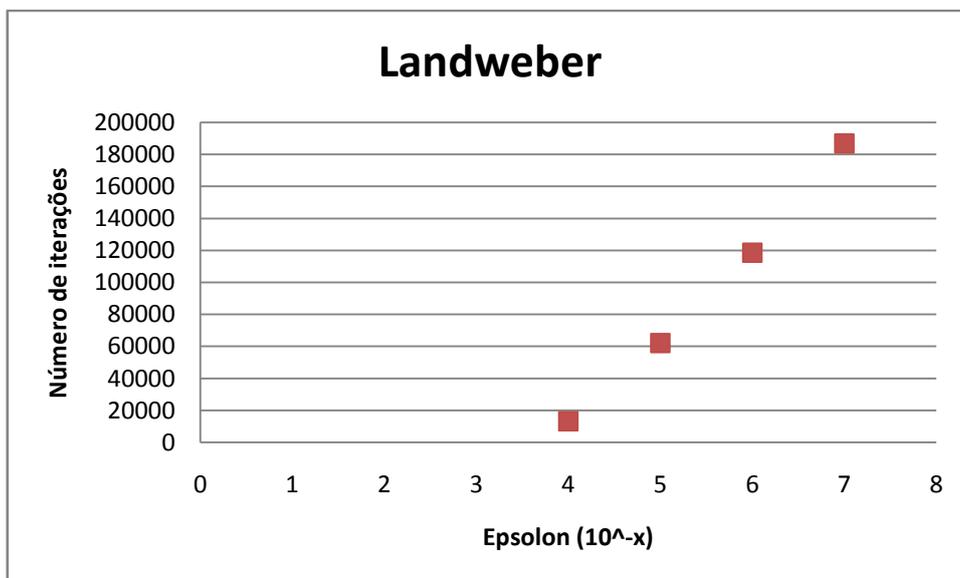


Figure 14: Gráfico que expressa a relação epsilon e número de iterações.

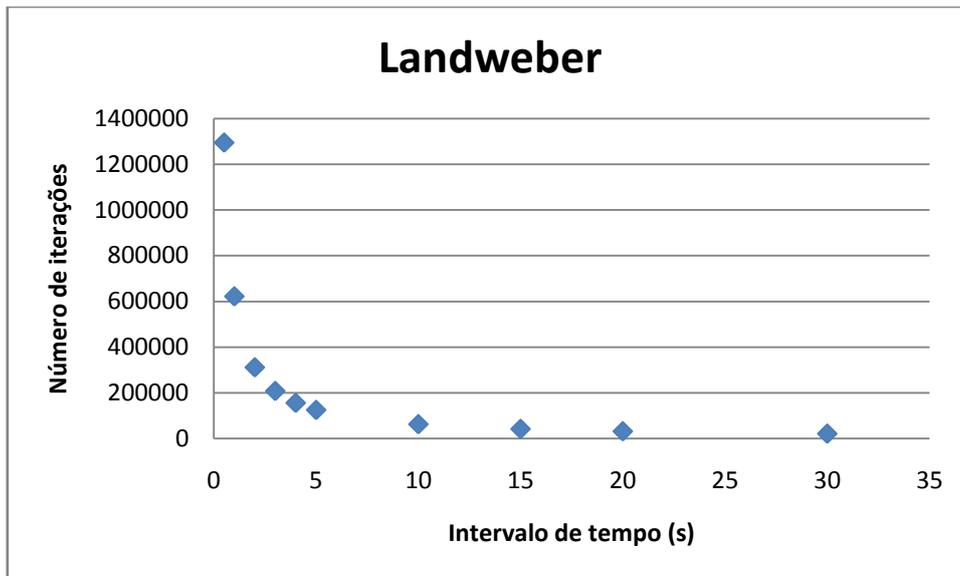


Figure 15: Gráfico que expressa a relação intervalo de tempo e número de iterações.

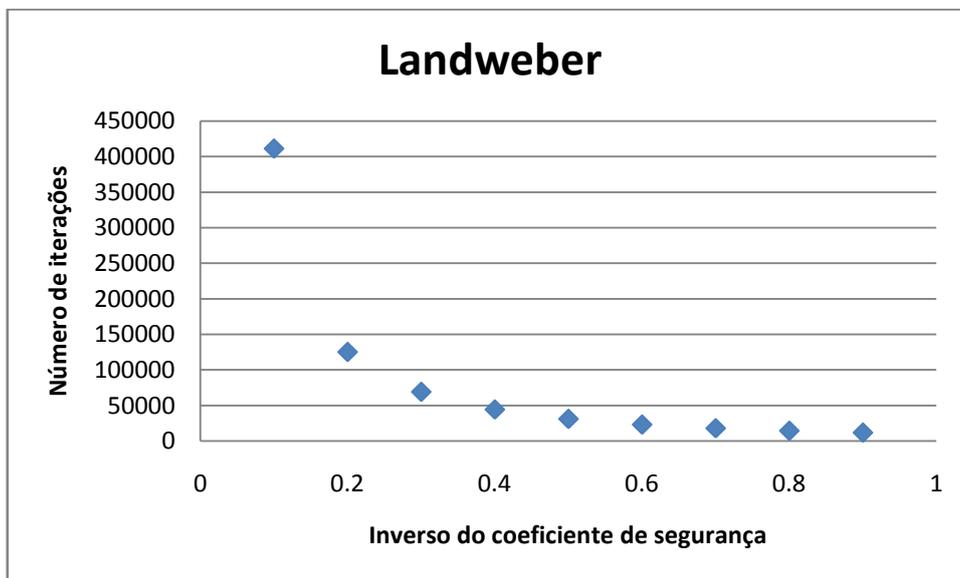


Figure 16: Gráfico que expressa a relação do inverso do coeficiente de segurança com o número de iterações

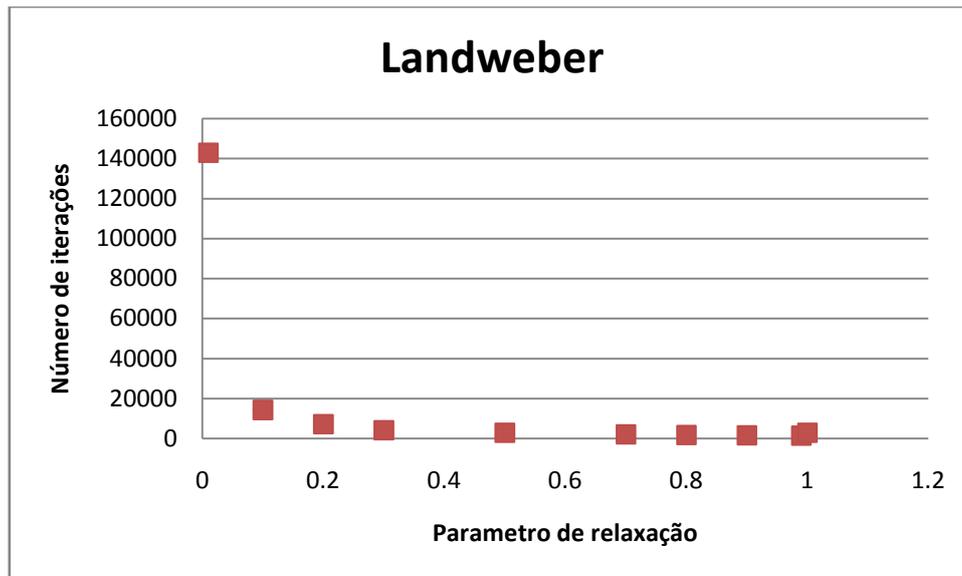


Figure 17: Gráfico que expressa a relação do parâmetro de relaxação com o número de iterações.

Com base nos resultados acima foram determinados os “melhores” valores para os parâmetros que modelam este problema.

$$\text{limite}_n = 3; \text{limite}_t = 20; x = 0.02; \text{alfa} = 0.8; \text{lambda} = 1;$$

$$\text{epsilon} = 10^{-5}; \text{tau} = 1.1$$

Quanto às simulações que levam em conta o erro inerente a qualquer processo de medição, observou-se que o método funciona e conduz à convergência da solução correta. No entanto, as simulações são bastante demoradas, por menor que seja o erro introduzido na medição do perfil de velocidade.

### 10.3. MÉTODO ESTATÍSTICO DE BAYES

A modelagem deste método foi feita de forma diferente dos dois anteriores. Neste caso, como se trata de uma abordagem estatística, foi feita a minimização da função representada por (8) através da função  $[z, fval, \text{exitflag}] = \text{fminunc}(@\text{myfun}, z0)$  do Matlab. Sendo que  $\text{myfun}$  é a função dada por (54).

Nesta abordagem, o parâmetro relevante a ser analisado é o número de pontos do perfil de velocidade que se conhece. Isto porque, supondo que a equação (21) seja composta por dois termos, para recuperar os coeficientes  $A_n$  são necessários, no mínimo, dois valores de  $v(\xi_0, \tau)$ . No entanto, quanto maior o número de pontos conhecidos ( $v(\xi_0, \tau)$ ), mais precisa é a informação obtida.

Com base neste aspecto, foram realizadas algumas simulações. Os resultados encontram-se plotados abaixo. É possível verificar que quanto maior o número de pontos conhecidos do perfil de velocidade, menor o erro associado à solução obtida.

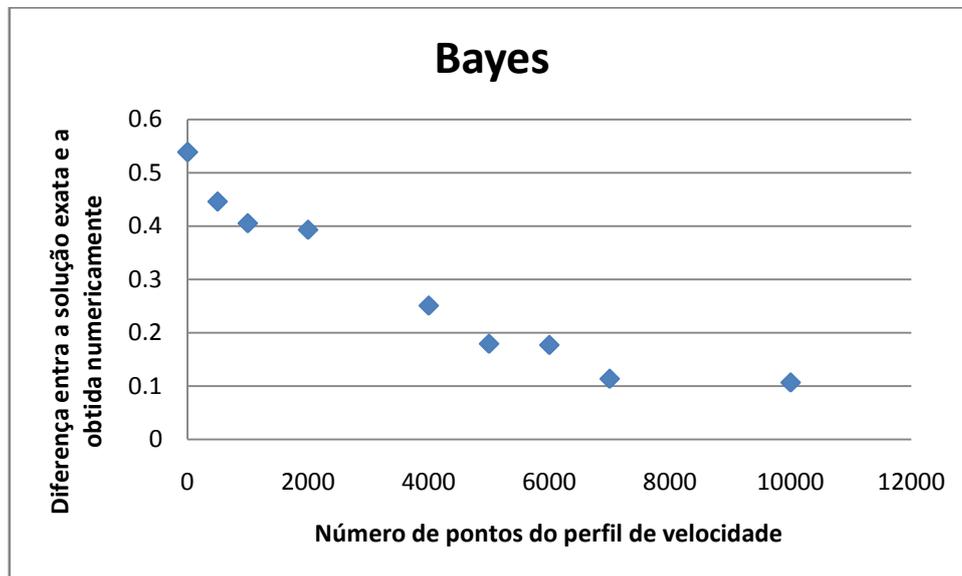


Figure 18: Influência do número de pontos do perfil de velocidade na solução obtida.

## 11. CONCLUSÃO

---

O que se conclui das simulações dos três métodos de regularização abordados, primeiramente, que o método iterativo de Landweber, embora tenha convergência garantida de acordo com o teorema expresso em [1], é aquele que possui o maior custo computacional. O número de iterações, à medida que aumenta a incerteza associada ao perfil de velocidade medido, cresce demasiadamente. Neste trabalho, este fator foi um ponto crítico e limitou de certa forma o número de simulações deste método.

Tratando do método de Tikhonov, observa-se que a implementação é bastante simples e, além disso, o custo computacional é relativamente baixo. Este método também apresenta ótimos resultados, em especial quando se utiliza um longo intervalo de tempo. Outro fator importante é a escolha do parâmetro de regularização  $\delta$ . Observa-se que a partir de um determinado valor (neste experimento  $\delta = 10^{-25}$ ) o problema de mal condicionamento passa a existir novamente.

Quanto ao método estatístico de Bayes, trata-se de uma abordagem muito interessante, pois diferentemente dos outros dois métodos, permite a inserção de informações previamente conhecidas. Por exemplo, de acordo com [5] há um banco de dados (The International Initial Imperfection Data Bank) criado por pesquisadores das Universidades de Delft e Haifa que armazena informações sistemáticas sobre imperfeições em cascas cilíndricas metálicas, motivados pelo estudo de flambagem em estruturas utilizadas na indústria aeroespacial. Portanto, alguém que deseja medir imperfeições em uma estrutura que possui essas características pode utilizar tais informações na modelagem do problema, o que torna este modelo bastante flexível.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] BAUMEISTER, A.; LEITÃO, A. **Topics in inverse problems**. In 25<sup>o</sup> CBM. 2005. 203p.
- [2] BEM-HAIM, Y.; ELISHAKOFF, I. **Dynamics of a thin cylindrical shell under impact with limited deterministic information on its initial imperfection**. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1990. p-103-112.
- [3] GODOY, L. A. **Thin –walled structures with structural imperfections: analysis and behavior**. Tarrytown: Pergamon, 1996.
- [4] JONES, N. **Structural impact**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 1997.
- [5] KAIPO, J.; SOMERSALO, E. **Statistical and computational inverse problems**. Nova Iorque: Springer, 2004, v. 160.
- [6] LASER RANGE FINDER. Disponível em [www.bestshotdirect.com/rangefinders/](http://www.bestshotdirect.com/rangefinders/) Acesso em 20 de nov. de 2009.
- [7] KAWANO, A. **Bayesian updating, maximum likelihood estimation and response surfaces**. Yokohama National University, Yokohama, 1999. 13p.
- [8] KAWANO, A.; ZINE, A. **Identification of initial imperfection in thin cylindrical shells from its dynamics**. SIAM – Mathematical Analysis, Nova Iorque, 2010. 12p. No prelo.